

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОДНИМ КЛАССОМ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Иван Дмитриевич Ильиных

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

i.ilinykh@g.nsu.ru

Аннотация

В работе рассматривается уравнение с запаздывающим аргументом и последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Изучается сходимость последовательности функций Ляпунова, доказываются оценки на скорости стабилизации к нулю при $t \rightarrow \infty$ решений задачи для уравнения с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова и фразы

дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, устойчивость, уравнение Ляпунова

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

Для цитирования

Ильиных И.Д. О сходимости последовательности функций Ляпунова, определяемых одним классом систем дифференциальных уравнений большой размерности // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 71-94. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-71-94

On convergence of a sequence of Lyapunov functions defined by a class of high-dimensional systems of differential equations

Ivan D. Ilinykh

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

i.ilinykh@g.nsu.ru

Abstract

In the paper a delay differential equation and a sequence of high-dimensional systems of ordinary differential equations are considered. The limit of a sequence of Lyapunov functions is studied, and estimates for stabilization rates of solutions to the delay differential equation to zero as $t \rightarrow \infty$ are established.

Keywords

delay differential equation, high-dimensional system of ordinary differential equations, stability, Lyapunov equation

Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation

For citation

Ilinykh I.D. On convergence of a sequence of Lyapunov functions defined by a class of high-dimensional systems of differential equations // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 71-94. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-71-94

§ 1. Введение и предварительная информация

Данная работа является продолжением статьи [1] и исследований свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности ($n \gg 1$), имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A_n x(t) + F(t, x(t)), & t > 0, \\ x|_{t=0} = x^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad F(t, x) = \begin{pmatrix} g(t, x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подобные системы возникают в задачах из области биологии и химии (см., например, [2–4] и имеющуюся там литературу). В частности, такие системы возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества [3], при этом n — количество стадий, $x_j(t)$ — концентрация вещества на j -й стадии, а $\tau > 0$ — время протекания процесса. Если число стадий $n \gg 1$, то вычисление конечной концентрации $x_n(t)$ становится сложной вычислительной проблемой. Встречаются системы с размерностями порядка $n \sim 10^{20}$ или 10^{30} , прямой численный расчет которых на ЭВМ не представляется возможным.

Эффективное решение этой задачи для частного случая было получено в 2002 г. в результате сотрудничества Г.В. Демиденко, В.А. Лихошвая и С.И. Фадеева. В.А. Лихошваем была выдвинута гипотеза о связи между решениями исходной системы (1.1) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t, y(t - \tau)),$$

а численные расчеты, проведенные С.И. Фадеевым, подтверждали эту гипотезу.

Строгое математическое доказательство гипотезы было дано Г.В. Демиденко и изложено в публикации [4]. Сформулируем основной результат для системы (1.1). Пусть функция $g(t, z) \in C(\mathbb{R}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|g(t, z^1) - g(t, z^2)| \leq L|z^1 - z^2|, \quad t \geq 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим последовательность задач Коши для систем вида (1.1) с нулевыми начальными условиями и определим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$, состоящую из последних компонент решений. Справедлива следующая теорема.

Теорема (Г.В. Демиденко). Последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$, $T > \tau$:

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ y(\tau + 0) = 0, \end{cases}$$

при этом

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/2}}, \quad n > n_0.$$

Эта теорема послужила основой для доказательства множества предельных теорем (см., например, [5–13]). Отметим, что в работе [13] данная теорема была обобщена на случай, когда функции $g(t, z)$ не являются ограниченными.

В соответствии со статьей [1], рассмотрим семейство задач Коши

$$\begin{cases} \frac{dx^n(t)}{dt} = A_n x^n(t), & t > 0, \\ x^n|_{t=0} = \hat{x}^n, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$A_{n+1} = \left(\begin{array}{ccccc} -n & 0 & \dots & \dots & b \\ n & -n & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n & a \end{array} \right) \Bigg\} n + 1,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ — постоянные и начальную задачу для уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + by(t - 1), & t > 1, \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [0, 1], \\ y(1+) = \varphi(1), \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\varphi \in C([0, 1])$. Также рассмотрим уравнения Ляпунова для систем из (1.2)

$$H_n A_n + A_n^* H_n = -F_n, \quad (1.4)$$

где $H_n = \{h_{i,j}^n\}_{i,j=1}^n$, $F_n = F_n^* = \{f_{i,j}^n\}_{i,j=1}^n > 0$ — некоторая положительно

определенная симметричная матрица и краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = f(x, y), \quad x, y \in (0, 1), \\ bh(0, y) + ah(1, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(1, y) = f_1(y), \quad y \in [0, 1], \\ bh(x, 0) + ah(x, 1) + \frac{\partial h}{\partial x}(x, 1) = f_2(x), \quad x \in [0, 1], \\ 2ah(1, 1) + b(h(0, 1) + h(1, 0)) = f_3, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

где f, f_1, f_2 — некоторые функции, $f_3 \in \mathbb{R}$.

В статье [1] был изучен вопрос о связи областей асимптотической устойчивости нулевого решения системы из (1.2) и области асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения из (1.3), а также изучены предельные свойства последовательности интегралов Ляпунова, определенных системами вида (1.4).

В данной статье в параграфе 2 будет исследована асимптотика промежуточных компонент решения задачи Коши (1.2) и сходимость функций Ляпунова для систем из (1.2). В параграфе 3 будут получены оценки на скорость сходимости к нулю решений задачи (1.3) при $t \rightarrow \infty$, используя предельный функционал Ляпунова-Красовского для (1.3).

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Г.В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

§ 2. Сходимость промежуточных компонент

Обозначим за $x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_n^n(t))^T$ — решение задачи Коши (1.2), $\hat{x}^n = (\hat{x}_1^n, \hat{x}_2^n, \dots, \hat{x}_n^n)^T$ — начальный вектор из задачи Коши (1.2). Справедлива теорема

Теорема 2.1. *Зафиксируем $T > 2$ и $\varepsilon \in (0, T - 2)$. Существует последовательность $\{\hat{x}^n\}$ начальных векторов из задачи Коши (1.2), такая что для любого n*

$$\sum_{k=1}^n |\hat{x}_k^n| \leq C,$$

где C — константа, не зависящая от n и последовательность $\{x_n^n(t)\}$ последних компонент решения (1.2) сходится равномерно по $t \in [2 + \varepsilon, T]$ при $n \rightarrow \infty$ к $y(t)$:

$$x_n^n(t) \Rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad t \in [2 + \varepsilon, T],$$

а также сходится в пространстве L_1 на отрезке $[0, T]$:

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_1([0, T])\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $y(t)$ — решение начальной задачи (1.3).

Остальные компоненты решения задачи (1.2) будут сходиться к нулю. Скорость сходимости к нулю определяется из следующей теоремы.

Теорема 2.2. Зафиксируем произвольные $\alpha > 0$ и $T > 3 + 2\alpha$. Пусть последовательность $\{\hat{x}^{n+1}\}$ начальных векторов из задачи Коши (1.2) выбрана так, что

$$\sum_{k=1}^n |\hat{x}_k^{n+1}| \leq C,$$

где C — константа, не зависящая от n , а также

$$x_{n+1}^{n+1}(t) \rightrightarrows y(t), \quad t \in [2 + \alpha, T],$$

$$\|x_{n+1}^{n+1}(t) - y(t), L_1([0, T])\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $y(t)$ — решение начальной задачи (1.3). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\max \left\{ \left| nx_k^{n+1}(t) - by \left(t - \frac{k-1}{n} \right) \right| : t \in [3 + 2\alpha, T], \quad k = 1, \dots, n \right\} \rightarrow 0.$$

Из теоремы следует, что функции $nx_{n\beta}^{n+1}(t)$ равномерно по $t \in [3 + 2\alpha, T]$ аппроксимируют функцию $z(t, \beta) = by(t - \beta)$, где $\beta \in [0, 1]$.

Доказательство. Введем ряд вспомогательных обозначений. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — некоторые непрерывные функции на $t \geq 0$. Обозначим за $(x*y)_\theta(t)$ — свертку $x(t)\theta(t)$ и $y(t)\theta(t)$, где $\theta(t)$ — функция Хэвисайда:

$$(x*y)_\theta(t) = \int_0^t x(s)y(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)\theta(s)\theta(t-s)ds.$$

За $\psi_k(t)$ обозначим пси-функции — решения задач Коши

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + n \text{Id} \right)^k \psi_k(t) = 0, & t > 0, \\ \psi_k(0) = 0, \\ \psi'_k(0) = 0, \\ \dots \\ \psi_k^{(k-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что для пси-функций выполнены соотношения:

$$\forall k \geq 2, \quad \psi_k(t) = (\psi_{k-1} * \psi_1)_\theta(t), \quad (2.1)$$

$$\forall k \geq 1, \quad \psi_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-nt}.$$

Для удобства записи опустим верхний индекс в записи решения $x_k^{n+1}(t)$ задачи Коши (1.2). Рассмотрим дифференциальные уравнения (1.2) для размерности $n+1$:

$$x_k(t) + nx'_k(t) = nx_{k-1}(t), \quad k = 2, \dots, n.$$

Интегрируя, получаем

$$x_k(t) = x_k(0)e^{-nt} + n \int_0^t x_{k-1}(s)e^{-n(t-s)} ds = x_k(0)\psi_1(t) + n(\psi_1 * x_{k-1})_\theta(t).$$

Продолжая равенства и используя (2.1), имеем

$$x_k(t) = x_k(0)\psi_1(t) + nx_{k-1}(0)\psi_2(t) + \dots + n^{k-2}x_2(0)\psi_{k-1}(t) + n^{k-1}(\psi_{k-1} * x_1)_\theta(t). \quad (2.2)$$

Для первой компоненты решения $x_1(t)$ справедливо

$$x_1(t) + nx'_1(t) = bx_{n+1}(t),$$

$$x_1(t) = x_1(0)\psi_1(t) + b(\psi_1 * x_{n+1})_\theta(t).$$

Благодаря этому, умножая (2.2) на n , получаем

$$nx_k(t) = \sum_{j=1}^k n^j \psi_j(t) x_{k+1-j}(0) + bn^k (\psi_k * x_{n+1})_\theta(t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

В дальнейших рассуждениях мы будем часто пользоваться следующим простым утверждением

Лемма 2.3. Пусть $p(t)$ — полином степени m , $\gamma > 0$ — некоторое положительное число. Тогда

$$\forall t \geq 0, \quad |p(t)|e^{-\gamma t} \leq Ce^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

где C — некоторая константа, зависящая от γ, m и коэффициентов $p(t)$.

Рассмотрим несколько свойств функций $\psi_k(t)$, которые далее нам понадобятся.

Лемма 2.4. Для любого $\delta > 0$ рассмотрим множество

$$D_k^n(\delta) = [0, +\infty) \setminus \left(\frac{k-1}{n} - \delta, \frac{k-1}{n} + \delta \right).$$

Тогда

$$\forall k = 1, \dots, n+1, \quad \forall t \in D_k^n(\delta), \quad n^k \psi_k(t) \leq Ce^{-\gamma n},$$

где $C, \gamma > 0$ зависят только от δ .

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $k = 1$. Тогда $D_1^n(\delta) = [\delta, +\infty)$, а функция $n\psi_1(t) = ne^{-nt}$ убывает при $t \geq 0$, следовательно,

$$n\psi_1(t) \leq ne^{-n\delta} \leq Ce^{-n\frac{\delta}{2}},$$

по лемме 2.3.

Для удобства записи оставшиеся случаи сформулируем следующим образом:

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \forall t \in D_{k+1}^n(\delta), \quad n^{k+1} \psi_{k+1}(t) \leq Ce^{-\gamma n}.$$

Рассмотрим отдельно два случая: $0 \leq t \leq \frac{k}{n} - \delta$ и $t \geq \frac{k}{n} + \delta$. Пусть $t \geq \frac{k}{n} + \delta$. Вычислим производную функции $\psi_{k+1}(t)$:

$$\psi_{k+1}(t) = \frac{t^k}{k!} e^{-nt},$$

$$\psi'_{k+1}(t) = \frac{t^{k-1} e^{-nt}}{k!} (-nt + k),$$

следовательно, $\psi_{k+1}(t)$ возрастает при $t \in [0, \frac{k}{n}]$ и убывает при $t \geq \frac{k}{n}$. Таким образом, для любых $t \geq \frac{k}{n} + \delta$ выполнено

$$\psi_{k+1}(t) \leq \psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} + \delta\right).$$

Оценим $n^{k+1} \psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} + \delta\right)$ по формуле Стирлинга:

$$\begin{aligned} n^{k+1} \psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} + \delta\right) &= \frac{\left(\frac{k}{n} + \delta\right)^k}{k!} n^{k+1} e^{-n\left(\frac{k}{n} + \delta\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{k}{n} + \delta\right)^k}{\theta_k \sqrt{2\pi k} \cdot k^k} n^{k+1} e^{-n\delta} \leq \left(1 + \frac{n\delta}{k}\right)^k n e^{-n\delta} \leq n(1 + \delta)^n e^{-n\delta}, \end{aligned}$$

где $\theta_k \in (1, e^{\frac{1}{12}})$. Последнее неравенство справедливо, поскольку для любого $\alpha > 0$ функция $g(x) = \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$ возрастает по x , а также потому что $k \leq n$. Таким образом,

$$n^{k+1} \psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} + \delta\right) \leq n \exp\{n(\ln(1 + \delta) - \delta)\} = ne^{-\gamma(\delta)n},$$

где $\gamma(\delta) = \delta - \ln(1 + \delta)$. Остается лишь заметить, что $\gamma(\delta) > 0$ для любых $\delta > 0$, и применить лемму 2.3.

Пусть теперь $0 \leq t \leq \frac{k}{n} - \delta$. Данный промежуток будет не пуст только при $\delta \leq \frac{k}{n}$. Аналогично предыдущему, для любых $t \in [0, \frac{k}{n} - \delta]$ выполнено

$$\psi_{k+1}(t) \leq \psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} - \delta\right).$$

Оценим $n^{k+1}\psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} - \delta\right)$:

$$\begin{aligned} n^{k+1}\psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} - \delta\right) &= \frac{\left(\frac{k}{n} - \delta\right)^k}{k!} n^{k+1} e^{-n\left(\frac{k}{n} - \delta\right)} \\ &\leq \left(1 - \frac{n\delta}{k}\right)^k n e^{n\delta} \leq n(1 - \delta)^n e^{n\delta}, \end{aligned}$$

поскольку для любого $\alpha > 0$ функция $g(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^x$ возрастает при $x \geq \alpha$, а мы как раз рассматриваем $n \geq k \geq n\delta$. Таким образом,

$$n^{k+1}\psi_{k+1}\left(\frac{k}{n} - \delta\right) \leq n(1 - \delta)^n e^{n\delta} = n \exp\{n(\delta + \ln(1 - \delta))\} = n e^{-\mu(\delta)n},$$

где $\mu(\delta) = -\delta - \ln(1 - \delta)$. В рассматриваемом случае $\delta \leq \frac{k}{n} \leq 1$. При данных δ функция $\mu(\delta) > 0$. Остается только применить лемму 2.3. Учитывая полученные оценки, лемма доказана. $\square$

Лемма 2.5. Зафиксируем $\alpha > 0$. Тогда

1. Для любых $k \geq 1$ выполнено

$$\int_0^{+\infty} n^k \psi_k(s) ds = 1$$

2. Начиная с некоторого N при $n > N$ для любых $k = 1, \dots, n+1$, для любого $t \geq 1 + \alpha$ выполнено

$$\int_t^{+\infty} n^k \psi_k(s) ds \leq C e^{-\gamma n},$$

где N, C, γ — константы, зависящие только от α .

3. Имеет место равномерная по $k = 1, \dots, n+1$ и по $t \geq 1+\alpha$ сходимость при $n \rightarrow \infty$ интегралов

$$\int_0^t n^k \psi_k(s) ds \Rightarrow 1.$$

4. Зафиксируем $\delta > 0$ и $T > 1 + \alpha$. Тогда имеет место равномерная по $k = 1, \dots, n+1$ и по $t \in [1+\alpha, T]$ сходимость при $n \rightarrow \infty$ интегралов

$$\int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds \Rightarrow 1,$$

$$\text{где } B_k^n(\delta) = [0, t] \cap \left[\frac{k-1}{n} - \delta, \frac{k-1}{n} + \delta \right].$$

Доказательство. Первое свойство очевидно, третье является следствием первого и второго. Четвертое свойство является следствием третьего свойства и леммы 2.4. Докажем второе свойство. Рассмотрим

$$\int_t^{+\infty} n^k \psi_k(s) ds = \int_t^{+\infty} n \frac{(ns)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-ns} ds.$$

при $m \in [1, n]$ и $s \geq 1 + \alpha > 1$,

$$1 < \frac{ns}{m},$$

$$\frac{(ns)^{m-1}}{(m-1)!} < \frac{(ns)^m}{m!},$$

следовательно

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} n^k \psi_k(s) ds &\leq \int_{1+\alpha}^{+\infty} n \frac{(ns)^n}{n!} e^{-ns} ds \leq \frac{n}{\sqrt{2\pi n}} \int_{1+\alpha}^{+\infty} s^n e^{n-sn} ds \\ &\leq \sqrt{n} e^n \int_{1+\alpha}^{+\infty} s^n e^{-s(n-1)} e^{-s} ds. \end{aligned}$$

Функция $g(s) = s^n e^{-s(n-1)}$ возрастает при $s \in (0, \frac{n}{n-1})$ и убывает при $s \geq \frac{n}{n-1}$. Поскольку $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то начиная с некоторого $n > N$ будет

выполнено $\frac{n}{n-1} < 1 + \alpha$, следовательно при таких n функция $g(s)$ будет убывать при $s \geq 1 + \alpha$. Таким образом, начиная с $n > N$,

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} n^k \psi_k(s) ds &\leq \sqrt{n} e^n \int_{1+\alpha}^{+\infty} s^n e^{-s(n-1)} e^{-s} ds \\ &\leq \sqrt{n} e^n (1 + \alpha)^n e^{-(1+\alpha)(n-1)} \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{-s} ds = \sqrt{n} (e(1 + \alpha)e^{-1-\alpha})^n. \end{aligned}$$

При $\alpha > 0$ функция $g(\alpha) = e(1 + \alpha)e^{-1-\alpha} < 1$. Используя лемму 2.3, завершаем доказательство. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 2.2. В условии теоремы $t \in [3 + 2\alpha, T]$. Учитывая полученные оценки и условие теоремы, имеем

$$\left| \sum_{j=1}^k n^j \psi_j(t) x_{k+1-j}(0) \right| \leq \max_{j=1, \dots, n} |n^j \psi_j(t)| \cdot \sum_{j=1}^k |x_j(0)| \leq C e^{-\gamma n}, \quad \forall t \geq 1 + \alpha, \quad (2.4)$$

где C, γ не зависят от n . Таким образом, учитывая равенство (2.3), на равномерную сходимость $n x_k(t)$ влияет только $b n^k (\psi_k * x_{n+1})_\theta(t)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $y(t)$ равномерно непрерывна на $t \in [0, T]$, то найдется такое $\delta > 0$, что

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T] : |t_1 - t_2| < \delta, \quad |y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Представим свертку $n^k (\psi_k * x_{n+1})_\theta(t)$ в виде

$$\begin{aligned} n^k (\psi_k * x_{n+1})_\theta(t) &= \int_0^t n^k \psi_k(s) x_{n+1}(t-s) ds \\ &= \int_0^t n^k \psi_k(s) (x_{n+1}(z) - y(z))|_{z=t-s} ds + \int_0^t n^k \psi_k(s) y(t-s) ds. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Оценим первое слагаемое:

$$\left| \int_0^t n^k \psi_k(s) (x_{n+1}(z) - y(z))|_{z=t-s} ds \right| = \left| \int_0^t n^k \psi_k(t-s) (x_{n+1}(s) - y(s)) ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{2+\alpha}^t n^k \psi_k(t-s)(x_{n+1}(s) - y(s))ds \right| + \left| \int_0^{2+\alpha} n^k \psi_k(t-s)(x_{n+1}(s) - y(s))ds \right| \\
&\leq \|x_{n+1} - y, C([2+\alpha, T])\| \left| \int_{2+\alpha}^t n^k \psi_k(t-s)ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{t-2-\alpha}^t n^k \psi_k(s)(x_{n+1}(z) - y(z))|_{z=t-s}ds \right| \\
&\leq \|x_{n+1} - y, C([2+\alpha, T])\| + Ce^{-\gamma n} \|x_{n+1} - y, L_1([0, T])\|.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку по условию теоремы, $t \geq 3 + 2\alpha$, следовательно $t - 2 - \alpha \geq 1 + \alpha$, а значит по лемме 2.4, во втором интеграле $n^k \psi_k(s) \leq Ce^{-\gamma n}$. Отсюда ясно, что при выполнении условий теоремы 2.2 первое слагаемое в (2.6) равномерно сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Второе слагаемое в (2.6) можно записать в виде

$$\int_0^t n^k \psi_k(s)y(t-s)ds = \int_{A_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s)y(t-s)ds + \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s)y(t-s)ds, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned}
A_k^n(\delta) &= [0, t] \setminus \left[\frac{k-1}{n} - \delta, \frac{k-1}{n} + \delta \right], \\
B_k^n(\delta) &= [0, t] \cap \left[\frac{k-1}{n} - \delta, \frac{k-1}{n} + \delta \right].
\end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в (2.7):

$$\left| \int_{A_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s)y(t-s)ds \right| \leq \|y, C([0, T])\| \int_{A_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s)ds.$$

По лемме 2.4, получаем, что

$$\left| \int_{A_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s)y(t-s)ds \right| \leq \|y, C([0, T])\| Ce^{-\gamma n} T,$$

Представим второе слагаемое из (2.7) в виде

$$\begin{aligned} \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) y(t-s) ds &= \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) \left[y(t-s) - y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \right] ds \\ &\quad + y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из определения $B_k^n(\delta)$ следует, что при $s \in B_k^n(\delta)$,

$$\left| t-s - \left(t - \frac{k-1}{n}\right) \right| = \left| \frac{k-1}{n} - s \right| < \delta,$$

следовательно, благодаря (2.5),

$$\left| \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) \left[y(t-s) - y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \right] ds \right| \leq \varepsilon \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds \leq \varepsilon.$$

Представим второе слагаемое из (2.8) в виде

$$\begin{aligned} &y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds \\ &= y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) + y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Оценим второе слагаемое в (2.9):

$$\begin{aligned} &\left| y\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds \right) \right| \\ &\leq \|y, C([0, T])\| \left(1 - \int_{B_k^n(\delta)} n^k \psi_k(s) ds \right), \end{aligned}$$

что равномерно сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$ по лемме 2.5.

Таким образом, благодаря полученным оценкам, выполнено

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \left| nx_k^{n+1}(t) - by\left(t - \frac{k-1}{n}\right) \right| : t \in [3 + 2\alpha, T], k = 1, \dots, n \right\} \leq \varepsilon,$$

для любого $\varepsilon > 0$, что завершает доказательство теоремы 2.2.

□

Теорема 2.2 позволяет изучить вопрос о сходимости функций Ляпунова для систем уравнений из (1.2).

Следствие 2.5.1. Зафиксируем $\alpha > 0$ и $T > 3 + 2\alpha$. Пусть

1. $(a, b) \in \Omega$, где Ω — область асимптотической устойчивости уравнения с запаздыванием из (1.3),
2. $y(t)$ — решение начальной задачи (1.3),
3. $x_1^{n+1}(t), \dots, x_{n+1}^{n+1}(t)$ — решение задачи Коши (1.2) с начальным вектором $\hat{x}^{n+1}$, причем последовательность $\{\hat{x}^{n+1}\}$ начальных векторов выбрана так, что

$$\sum_{k=1}^n |\hat{x}_k^{n+1}| \leq C,$$

где C — константа, не зависящая от n , а также

$$x_{n+1}^{n+1}(t) \Rightarrow y(t), \quad t \in [2 + \alpha, T],$$

$$\|x_{n+1}^{n+1}(t) - y(t), L_1([0, T])\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

4. $\{h_{i,j}^{n+1}\}_{i,j=1}^{n+1}$ — решение уравнений Ляпунова (1.4) с матрицами $(-F_{n+1})$ — проекциями правых частей f краевой задачи (1.5) на сетку

$$\omega_n = \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i = \frac{i}{n}, \quad y_j = \frac{j}{n}, \quad i, j = 0, \dots, n \right\},$$

5. Для

$$\psi^n = \xi^n A_{n+1} + A_{n+1}^* \xi^n, \quad \xi^n = \{\xi_{i,j}^n\}_{i,j=1}^{n+1},$$

$$\xi_{i,j}^n = h_{i,j}^{n+1} - h \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right),$$

где h — непрерывное решение краевой задачи (1.5), выполнено

$$\max_{i,j} |\psi_{i,j}^n| = o \left(\frac{1}{\ln n} \right).$$

Тогда для любого $t < T$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} h_{i,j}^{n+1} x_i^{n+1}(t) x_j^{n+1}(t) \rightarrow H[y](t), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned}
 H[y](t) = & h(0,0)y^2(t) + by(t) \int_0^1 (h(1,z) + h(z,1))y(t-z)dz \\
 & + b^2 \int_0^1 \int_0^1 h(z_1, z_2)y(t-z_1)y(t-z_2)dz_1dz_2.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned}
 M_n = \max \left\{ \left| nx_k^{n+1}(t) - by \left(t - \frac{k-1}{n} \right) \right| : t \in [3+2\alpha, T], k = 1, \dots, n \right\}, \\
 N_n = \max_{i,j=1,\dots,n+1} \left| h_{i,j}^{n+1} - h \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

Из условий теоремы и [1],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_n = 0. \tag{2.11}$$

Для удобства далее опустим верхние индексы $h_{i,j}^{n+1}$ и x_k^{n+1} . Тогда

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^{n+1} h_{i,j}x_i(t)x_j(t) = h_{n+1,n+1}x_{n+1}^2(t) \\
 & + x_{n+1}(t) \left(\sum_{i=1}^n h_{i,n+1}x_i(t) + \sum_{j=1}^n h_{n+1,j}x_j(t) \right) \\
 & + \sum_{i,j \neq n+1} h_{i,j}x_i(t)x_j(t) = J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned}$$

Из условия теоремы и (2.11), получаем, что

$$J_1 \rightarrow h(0,0)y^2(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим первую сумму в J_2 , для второй рассуждения аналогичны:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n h_{i,n+1}x_i(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{i,n+1} \cdot nx_i(t) \\
 &= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n h_{i,n+1}y \left(t - \frac{i-1}{n} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{i,n+1} \left[nx_i(t) - by \left(t - \frac{i-1}{n} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Поскольку h непрерывна на $[0, 1]^2$ и выполнено (2.11), то найдется такая константа C_1 , не зависящая от n, i, j , что

$$\max_{i,j} |h_{i,j}| \leq C_1.$$

Тогда второе слагаемое из (2.12) оценивается как

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{i,n+1} \left[nx_i(t) - by \left(t - \frac{i-1}{n} \right) \right] \right| \leq C_1 M_n.$$

Первое слагаемое из (2.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n h_{i,n+1} y \left(t - \frac{i-1}{n} \right) &= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n h \left(\frac{i-1}{n}, 1 \right) y \left(t - \frac{i-1}{n} \right) \\ &+ \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left[h_{i,n+1} - h \left(\frac{i-1}{n}, 1 \right) \right] y \left(t - \frac{i-1}{n} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку $y(t)$ ограничена на $t \in [0, T]$, второе слагаемое из (2.13) можно оценить как

$$\left| \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left[h_{i,n+1} - h \left(\frac{i-1}{n}, 1 \right) \right] y \left(t - \frac{i-1}{n} \right) \right| \leq C_2 N_n.$$

При этом, первое слагаемое из (2.13) сходится к интегралу Римана, поскольку h и y непрерывны:

$$\frac{b}{n} \sum_{i=1}^n h \left(\frac{i-1}{n}, 1 \right) y \left(t - \frac{i-1}{n} \right) \rightarrow b \int_0^1 h(z, 1) y(t-z) dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$J_2 \rightarrow by(t) \int_0^1 (h(1, z) + h(z, 1)) y(t-z) dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогично получаем, что

$$J_3 \rightarrow b^2 \int_0^1 \int_0^1 h(z_1, z_2) y(t-z_1) y(t-z_2) dz_1 dz_2, \quad n \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство. □

Функционал (2.10) является функционалом Ляпунова-Красовского для уравнений с запаздывающим аргументом [14–16].

§ 3. Оценка скорости сходимости к нулю решения начальной задачи с запаздыванием

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений существует способ оценить скорость сходимости решений к нулю в области асимптотической устойчивости нулевого решения, используя функционалы Ляпунова. Покажем, что оценку также можно получить и для уравнений с запаздыванием, используя функционалы Ляпунова-Красовского. Отметим, что аналогичный результат также был получен в работе [16].

Далее рассматриваем $(a, b) \in \Omega$, $F_n = E_n$, где E_n — единичная матрица размера $n \times n$. Из [1] следует, что в этом случае следствие 2.5.1 будет выполнено, причем

$$h(x, y) = f(|x - y|), \quad x, y \in [0, 1], \quad (3.1)$$

где функция f определена с помощью

$$f(t) = \begin{cases} \frac{be^{\alpha(t+1)} + (\alpha - a)e^{-\alpha t}}{2\alpha(\alpha - a - be^{-\alpha})}, & |a| \neq |b|, \alpha - a - be^{-\alpha} \neq 0, \\ -\frac{t}{2} - \frac{1-a}{4a}, & a = b \neq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Вначале докажем оценку сверху на функционал Ляпунова-Красовского.

Лемма 3.1. Пусть $(a, b) \in \Omega$, $y(t)$ — решение (1.3), $H[y]$ — функционал Ляпунова-Красовского, определенный через (2.10), (3.1), (3.2). Тогда при $t > 1$ справедлива оценка

$$H[y](t) \leq Ce^{-\alpha t},$$

где $C, \alpha > 0$ — константы, не зависящие от t .

Доказательство. Оценим $H[y](t)$. Несложно убедиться в том, что

$$\frac{d}{dt}H[y](t) = -y^2(t).$$

Обозначим

$$M = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} h(x, y) < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 |H[y](t)| &\leq M|y(t)|^2 + 2M|b| \cdot |y(t)| \int_0^1 |y(t-z)|dz \\
 &\quad + M|b|^2 \int_0^1 \int_0^1 |y(t-z_1)||y(t-z_2)|dz_1dz_2, \\
 |H[y](t)| &\leq M \left(|y(t)| + |b| \int_{t-1}^t |y(s)|ds \right)^2 \leq 2M \left(|y(t)|^2 + |b|^2 \int_{t-1}^t |y(s)|^2ds \right).
 \end{aligned}$$

Введем вспомогательный функционал

$$J[y](t) = 2H[y](t) + \int_{t-1}^t (s - (t-1))y^2(s)ds. \quad (3.3)$$

Тогда для него выполнена оценка

$$\begin{aligned}
 |J[y](t)| &\leq 4M|y(t)|^2 + (4M|b|^2 + 1) \int_{t-1}^t |y(s)|^2ds \\
 &\leq C \left(|y(t)|^2 + \int_{t-1}^t |y(s)|^2ds \right),
 \end{aligned}$$

где $C = \max\{4M, 4M|b|^2 + 1\}$. При этом,

$$\frac{d}{dt}J[y](t) = -y^2(t) - \int_{t-1}^t y^2(s)ds.$$

Таким образом, выполнено дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt}J[y](t) \leq -\frac{1}{C} \cdot J[y](t),$$

из которого следует, что

$$J[y](t) \leq M_1 e^{-\alpha t},$$

где

$$M_1 = J[y](1)e^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{\max\{4M, 4M|b|^2 + 1\}}.$$

Учитывая (3.3), получаем

$$H[y](t) \leq \frac{M_1}{2} e^{-\alpha t}.$$

□

Лемма 3.2. Пусть $(a, b) \in \Omega$, $y(t)$ — решение (1.3), $H[y]$ — функционал Ляпунова-Красовского, определенный через (2.10), (3.1), (3.2). Тогда для решений системы (1.3) при $t > 1$ справедлива оценка

$$|y(t)|^3 \leq CH[y](t),$$

где C — константа, не зависящая от t .

Доказательство. При $(a, b) \in \Omega$, решения $y(t)$ сходятся к нулю, а значит ограничены:

$$\sup_{s \geq 0} |y(s)| < \infty.$$

Из (1.3) получаем

$$\frac{d}{dt} |y(t)|^3 \geq -3y^2(t)(|a||y(t)| + |b||y(t-1)|) \geq -Cy^2(t),$$

где $C = 3(|a| + |b|) \sup_{s \geq 0} |y(s)|$. Интегрируя это неравенство, с учетом $\frac{d}{dt} H[y](t) = -y^2(t)$, имеем

$$|y(t)|^3 \leq C \int_t^{+\infty} y^2(s) ds = CH[y](t).$$

□

Учитывая две предыдущие леммы, получаем оценку на скорость сходимости к нулю решений $y(t)$.

Теорема 3.3. Пусть $(a, b) \in \Omega$, $y(t)$ — решение (1.3), $H[y]$ — функционал Ляпунова-Красовского, определенный через (2.10), (3.1), (3.2). Тогда при $t > 1$ выполнено

$$|y(t)| \leq Ce^{-\alpha t},$$

где

$$C = \max \left\{ C_1 (||\varphi||_{C[0,1]})^{\frac{1}{3}}, C_1^{\frac{3}{2}} \right\}, \quad C_1 = \left(\frac{3(|a| + |b|)J[\varphi](1)e^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$J[\varphi](t) = 2H[\varphi](t) + \int_{t-1}^t (s - (t-1))\varphi^2(s)ds,$$

$$\alpha = \frac{1}{3 \max\{4M, 4M|b|^2 + 1\}}, \quad M = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} h(x, y).$$

Доказательство. Из доказательств лемм 3.1 и 3.2 при $t > 1$ имеем

$$|y(t)| \leq \left(3(|a| + |b|) \sup_{s \geq 0} |y(s)| \cdot H[y](t) \right)^{\frac{1}{3}} \leq C_1 \left(\sup_{s \geq 0} |y(s)| \right)^{\frac{1}{3}} e^{-\alpha t},$$

где

$$C_1 = \left(\frac{3(|a| + |b|)J[\varphi](1)e^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\alpha = \frac{1}{3 \max\{4M, 4M|b|^2 + 1\}}, \quad M = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} h(x, y).$$

Разберем два случая. Если $\sup_{s \geq 0} |y(s)| \leq \sup_{s \in [0,1]} |y(s)| = \|\varphi\|_{C[0,1]}$, то

$$|y(t)| \leq C_1 (\|\varphi\|_{C[0,1]})^{\frac{1}{3}} e^{-\alpha t}.$$

Если $\sup_{s \geq 0} |y(s)| > \sup_{s \in [0,1]} |y(s)| > 0$, то

$$|y(t)|e^{\alpha t} \leq C_1 \left(\sup_{s > 1} |y(s)| \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sup_{s > 1} |y(s)|e^{\alpha s} \leq C_1 \left(\sup_{s > 1} |y(s)|e^{\alpha s} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\left(\sup_{s > 1} |y(s)|e^{\alpha s} \right)^{\frac{2}{3}} \leq C_1.$$

Следовательно, для любых $t > 1$ выполнено

$$|y(t)| \leq C_1^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha t}.$$

Учитывая оба случая, теорема доказана. □

§ 4. Заключение

Было показано, что функционалы Ляпунова для систем из (1.2) сходятся к функционалам Ляпунова-Красовского для уравнений с запаздыванием из (1.3). По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями, были получены оценки на скорость сходимости к нулю решений начальной задачи (1.3) с использованием функционалов Ляпунова-Красовского.

Это обстоятельство дополняет результат [1] и может свидетельствовать о возможности получения качественных свойств решений уравнений с запаздывающим аргументом с помощью систем дифференциальных уравнений большой размерности.

Список литературы

1. Ильиных И. Д. Предельные свойства последовательности интегралов Ляпунова, определяемой одной системой дифференциальных уравнений большой размерности // *Математические труды*. 2025. Т. 28, №4. С. 46–78.
2. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
3. Хидиров Б. Н. Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // *Матем. моделирование*. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.
4. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
5. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // *Журн. выч. матем. матем. физ.* 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
6. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.

7. Демиденко Г. В., Мельник И. А. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
8. Котова Т. В., Мельник И. А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметрами // Новосибирск, 2010. 17 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; 253).
9. Матвеева И. И., Мельник И. А. О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 2. С. 312–324.
10. Демиденко Г. В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.
11. Демиденко Г. В. Метод решения одной биологической задачи большой размерности // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 4. С. 42–53.
12. Демиденко Г. В., Уварова И. А. Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2013. Т. 19, № 2. С. 47–60.
13. Demidenko G. V. Limit theorems for one class of large-dimensional systems of ordinary differential equations // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2024. V. 45, N. 9. P. 4479–4489.
14. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
15. Huang Wenzhang. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1989. V. 142, N. 1. P. 83–94.
16. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // *Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2005. №1-2.

References

1. Ilinykh I. D. Limit properties of a sequence of Lyapunov integrals determined by a high-dimensional system of ordinary differential equations // *Mat. Tr.* 2025. V. 28, N 4. P. 46–78 (in Russian).

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)

Математические труды, 2026, Том 29, № 3, С. 71-94

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 3, P. 71-94

2. Murray J. *Nonlinear Differential Equations in Biology. Lectures on Models*. Moscow: Mir, 1983 (in Russian).
3. Khidirov B. N. On one approach to modeling the regulatory mechanisms of living systems // *Mat. Model.* 2004. V. 16, N 7. P. 77–91 (in Russian).
4. Likhoshvai V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Yu. G. Modeling of multistage synthesis without branching by a delay equation // *Sib. J. Ind. Math.* 2004. V. 7, N 1. P. 73–94 (in Russian).
5. Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. Mathematical modeling of regular contours of gene networks // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 2004. V. 44, N 12. P. 2276–2295 (in Russian).
6. Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. On a class of systems of differential equations and on equations with a delay argument // *Sib. Math. J.* 2006. V. 47, N 1. P. 58–68.
7. Demidenko G. V., Melnik I. A. On one method for approximating solutions of differential equations with a delay argument // *Sib. Math. J.* 2010. V. 51, N 3. P. 528–546.
8. Kotova T. V., Melnik I. A. On properties of solutions of a certain nonlinear system of differential equations with parameters. Novosibirsk, 2010. 17 pp. (Preprint / RAS, Siberian Branch, Institute of Mathematics; No. 253) (in Russian).
9. Matveeva I. I., Melnik I. A. On properties of solutions for a class of nonlinear high-dimensional systems of differential equations // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 2. P. 312–324.
10. Demidenko G. V. High-dimensional systems of differential equations and equations with a delay argument // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 6. P. 1274–1282.
11. Demidenko G. V. A method for solving a biological problem of large dimension // *Sib. J. Ind. Math.* 2022. V. 25, N 4. P. 42–53 (in Russian).
12. Demidenko G. V., Uvarova I. A. A class of high-dimensional systems of ordinary differential equations // *Sib. J. Ind. Math.* 2013. V. 19, N 2. P. 47–60 (in Russian).
13. Demidenko G. V. Limit theorems for one class of large-dimensional systems of ordinary differential equations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. V. 45, N. 9. P. 4479–4489.

14. Krasovskii N. N. *Some Problems of the Theory of Stability of Motion*. Moscow: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
15. Huang Wenzhang. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1989. V. 142, N. 1. P. 83–94.
16. Kharitonov V. L. Lyapunov functionals with a given derivative. I. Functionals of complete type // *Vestn. St. Petersburg Univ. Ser. 10. Appl. Math. Comput. Sci. Control Process*. 2005. N 1–2 (in Russian).

Информация об авторе

Иван Дмитриевич Ильиных, магистрант

SPIN 7909-2501 AuthorID: 1301086

Scopus Author ID 59504927800

Author Information

Ivan D. Ilinykh, Master student

SPIN 7909-2501 AuthorID: 1301086

Scopus Author ID 59504927800

*Статья поступила в редакцию 16.05.2025;
одобрена после рецензирования 15.06.2025; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 16.05.2025;
approved after reviewing 15.06.2025; accepted for publication 06.08.2026*